Лекция 1. Комплекс сандарға амалдар қолдану

Жоспар:

1. Комплек сан
2. Комплекс санның алгебралық түрі
3. Комплекс сандарға амалдар қолдану
4. Мысалдар

§ 1. Комплекс сандар және оларға қолданылатын амалдар

Комплекс сан деп

$$z = x + iy \tag{1.1}$$

түрінде жазылатын өрнекті айтады, мұнда x, y – нақты сандар ($x \in R$, $y \in R$), $i = \sqrt{-1}$ – жорамал бірлік. x және y сандары сәйкес комплекс санның *нақты* және *жорамал* бөлігі деп аталады және былай белгіленеді: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Егер $y = 0$ болса, онда $x + i0 = x$ нақты санға тең, ал егер $x = 0$ болса, онда $0 + iy = iy$ таза жорамал сан деп аталады.

$z = x + iy$ өрнегі комплекс санның *алгебралық түрі* деп аталады. Комплекс сандар жиынын **C** әрпімен белгілейді, $z \in \mathbf{C}$ комплекс сандар жиынының элементі.

1. Егер $z_1 = x_1 + iy_1$ және $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс сандарының сәйкес нақты және жорамал бөліктері өзара тең болса,

$$x_1 = x_2, \ \ y_1 = y_2 \ \ (\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \ \ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2), \tag{1.2}$$

онда z_1, z_2 комплекс сандары тең деп аталады. Егер $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ болса, онда $z_1 = 0$.

Ескерту. Комплекс сандар жиыны *реттелмеген*, комплекс сандар үшін «үлкен», «кіші» ұғымдары жоқ.

2. Егер z_1 және z_2 комплекс сандарының нақты бөліктері өзара тең, ал жорамал бөліктерінің таңбалары қарама-қарсы болса, онда олар *түйіндес* деп аталады.

$z = x + iy$ комплекс санына түйіндес сан $\bar{z} = x - iy$. Жоғарыда айтылғанды былай жазуға болады: $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \bar{z}$, $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} \bar{z}$.

3. z_1 және z_2 комплекс сандарының алгебралық қосындысы деп

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \tag{1.3}$$

комплекс санын айтады.

4. z_1 және z_2 комплекс сандарының көбейтіндісі деп

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{1.4}$$

комплекс санын айтады (мұнда $i^2 = -1$ екенін ескеру қажет).

Түйіндес комплекс сандар үшін

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \;\; y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \;\; z\bar{z} = x^2 + y^2, \tag{1.5}$$

теңдіктерінің орындалатынын байқау қиын емес.

5. Көбейту және қосу амалдары үшін мына заңдар орындалады:

а) ауыстырымдылық заңы: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;

б) терімділік заңы: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $(z_1 \cdot z_2)z_3 = z_1(z_2 \cdot z_3)$;

в) үлестірімділік заңы: $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$;

мұнда $z_3 = x_3 + iy_3$.

6. Егер $z_2 \neq 0$ болса, онда z_1 және z_2 комплекс сандарының бөліндісі деп

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \tag{1.6}$$

комплекс санын айтады. Егер $\frac{z_1}{z_2}$ бөлшегінің алымы мен бөлімін $\bar{z}_2$ бөлімінің түйіндесіне көбейтіп, (1.4) формуласын ескерсек, онда (1.6) өрнегі пайда болады.

Мысалдар қарастырайық.

1-мысал: $z_1 = -2 + i$, $z_2 = 1 - 3i$ комплекс сандары берілсін. $z = z_1^2 - i z_1\bar{z}_2 + \frac{5z_2}{\bar{z}_1}$ табу керек.

Шешуі. Әр амалды жеке есептеп алайық.

а) $z_1^2 = (-2 + i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 3 - 4i$

б) $i z_1\bar{z}_2 = i(-2 + i)(1 + 3i) = (-2i - 1)(1 + 3i) = -2i - 6i^2 - 1 - 3i = 5 - 5i$

в) $\frac{5z_2}{\bar{z}_1} = \frac{5(1 - 3i)(-2 + i)}{(-2 - i)(-2 + i)} = \frac{5(-2 + i + 6i - 3i^2)}{(-2)^2 - i^2} = \frac{5(1 + 7i)}{5} = 1 + 7i$

г) $z = 3 - 4i - (5 - 5i) + 1 + 7i = (3 - 5 + 1) + (-4i + 5i + 7i) = -1 + 8i$

Есеп шығару барысында $i^2 = -1$ екенін ескердік.

Сонымен, жауабы: $z = -1 + 8i.$

2-мысал: $P(z) = 2z^2 - 3z + 6$ көпмүшелігі берілсін. $P(\bar{z}_0)-$ есептеңіз, мұнда $z_0 = \frac{1 + 2i}{1 - i}$.

Шешуі. Алдымен z_0 комплекс санын алгебралық түрде жазып алайық.

$$z_0 = \frac{1 - 2i}{1 - i} = \frac{(1 + 2i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{1 + 2i + i + 2i^2}{1^2 - i^2} = \frac{-1 + 3i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

Енді $P(\bar{z}_0)-$ есептейік.

$$P(\bar{z}_0)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)^2-3\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)+6=2\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}i+\frac{9}{4}i^2\right)+\frac{3}{2}+\frac{9}{2}i+6=$$
$$=\frac{1}{2}+3i-\frac{9}{2}+\frac{3}{2}+\frac{9}{2}i+6=\frac{7}{2}+\frac{15}{2}i$$

Жауабы: $P(\bar{z}_0)=\frac{7}{2}+\frac{15}{2}i.$

3-мысал: $(2x+3i)(1-i)+(x+iy)(2+i)=9-2i$ теңдеуінің нақты шешімдерін табыңыз.

Шешуі. Жақшаларды ашып, теңдеудің нақты және жорамал бөліктерін бөліп жазамыз:

$$2x-2xi+3i+3+2x+xi+2yi-y=9-2i$$
$$(4x-y+3)+(-x+2y+3)i=9-2i$$

Екі комплекс санның теңдігі туралы (1.2) – формуласын ескерсек, онда

$$\begin{cases}4x-y+3=9\\-x+2y+3=-2\end{cases}$$

жүйесіне келеміз. Жүйенің шешімі $x=1,\ y=-2$ екенін байқау қиын емес. Жауабы: $x=1,\ y=-2$.

4-мысал: $3z^2-(3+i)z+2-2i=0$ теңдеуін шешіңіз.

Шешуі. Алдымен квадрат теңдеудің дискриминантын есептейік:

$$D=(3+i)^2-12(2-2i)=9+6i+i^2-24+24i=-16+30i$$

Дискриминанттың түбірін табу үшін белгілеу енгіземіз:

$$\sqrt{-16+30i}=x+iy$$

Олай болса, $-16+30i=(x+iy)^2$

$$x^2-y^2+2xyi=-16+30i$$

Комплекс сандардың тең болу шартын ескерсек, онда

$$\begin{cases}x^2-y^2=-16\\2xy=30\end{cases}$$

жүйесіне келеміз. Жүйенің шешімі

$$x_1=3,\ x_2=-3,\ y_1=5,\ y_2=-5;$$

Демек $\sqrt{-16+30i}=\pm(3+5i)$

Сонымен квадрат теңдеудің шешімі:

$$z_{1,2}=\frac{3+i\pm(3+5i)}{6}=\left[\begin{array}{l}1+i\\-\frac{2i}{3}\end{array}\right.$$

Жауабы: $z_1=1+i;\ z_2=-\frac{2i}{3}.$

5-мысал: $\begin{cases} 2z_1 - (3-i)z_2 = 4-12i \\ (i-2)z_1 - z_2 = -2+i \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіңіз.

Шешуі. Сызықтық алгебра курсынан белгілі Крамер әдісін қолданайық. Алдымен берілген жүйенің анықтауыштарын есептейміз.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3+i \\ i-2 & -1 \end{vmatrix} = -2-(i-2)(i-3) = -7+5i$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4-12i & -3+i \\ i-2 & -1 \end{vmatrix} = -4+12i-(i-2)(i-3) = -9+17i$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4-12i \\ i-2 & i-2 \end{vmatrix} = -4+2i-(i-2)(4-12i) = -8-26i$$

Крамер формулалары бойынша

$$z_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-9+17i}{-7+5i} = \frac{(-9+17i)(-7-5i)}{(-7+5i)(-7-5i)} = \frac{63+45i-119i+85}{49+25} = \frac{148-74i}{74} = 2-i;$$

$$z_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-8-26i}{-7+5i} = \frac{(-8-26i)(-7-5i)}{(-7+5i)(-7-5i)} = \frac{56+40i+182i-130}{49+25} = \frac{-74+222i}{74} = -1+3i;$$

Жауабы: $z_1 = 2-i$; $z_2 = -1+3i.$

6-мысал: $\dfrac{z-3i}{2+5i} + \dfrac{3-7i}{5+i-z} = -2-2i$ теңдеуін шешіңіз.

Шешуі. Берілген теңдеудің екі жағын да $(2+5i)(5+i-z)$ өрнегіне көбейтеміз, мұнда $z \neq 5+i$, (бұл теңдеудің мүмкін мәндер облысы)

$$(z-3i)(5+i-z) + (3-7i)(2+5i) = (-2-2i)(2+5i)(5+i-z)$$

Жақшаларды ашып ұқсас мүшелерін біріктірсек, онда

$$z^2 - (11-10i)z - 50i = 0$$

квадрат теңдеуіне келеміз.

4-мысалдағыдай алдымен квадрат теңдеудің дискриминантын есептейік:

$$D = (11-10i)^2 + 200i = 21-20i$$

Дискриминанттың түбірін табу үшін белгілеу енгіземіз:

$$\sqrt{21-20i} = x+iy$$

Олай болса, $21-20i = (x+iy)^2$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 21-20i$$

Комплекс сандардың тең болу шартын ескерсек, онда

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 21 \\ 2xy = -20 \end{cases}$$

жүйесіне келеміз. Жүйенің шешімі

$$x_1 = 5,\ \ x_2 = -5,\ \ y_1 = -2,\ \ y_2 = 2;$$

Демек $\sqrt{21-20i} = \pm(5-2i)$

Сонымен квадрат теңдеудің шешімі:

$$z_{1,2} = \frac{11-10i \pm (5-2i)}{2} = \left[\begin{array}{l} 8-6i \\ \\ 3-4i \end{array}\right.$$

Жауабы: $z_1 = 8-6i;\ \ z_2 = 3-4i.$

7-мысал: $A = \begin{pmatrix} 1-i & -2-i & 3i \\ 3 & -1+i & 5+2i \\ -2+i & 2i & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ матрицалары берілген. AB, A^{-1} матрицаларын табыңыз және $AZ = B$ теңдеулер жүйесін шешіңіз, мұнда $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

Шешуі. Сызықтық алгебра курсынан матрицаларды көбейту формуласын еске түсірсек, онда $AB = \begin{pmatrix} 1-i & -2-i & 3i \\ 3 & -1+i & 5+2i \\ -2+i & 2i & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-i)(-i)+0+3i(-1) \\ -3i+0-5-2i \\ (-2+i)(-i)+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-4i \\ -5-5i \\ -1+2i \end{pmatrix}$

A^{-1} кері матрицасы келесі формуламен табылатыны бізге белгілі:

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, мұнда $A_{ij}, (i, j = 1,2,3)$ алгебралық толықтауыштар.

Алдымен A матрицасының анықтауышын есептейік:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-i & -2-i & 3i \\ 3 & -1+i & 5+2i \\ -2+i & 2i & 2 \end{vmatrix} = 2(1-i)(-1+i) + (-2+i)(-2-i)(5+2i) - 18 - 3i(-1+i)(-2+i) -$$

$$2i(1-i)(5+2i) - 6(-2-i) = 4+3i$$

Анықтауыш нөлге тең емес, олай болса кері матрица бар. Енді алгебралық толықтауыштарды табайық:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1+i & 5+2i \\ 2i & 2 \end{vmatrix} = 2-8i,\ \ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 5+2i \\ -2+i & 2 \end{vmatrix} = -18+i$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & -1+i\\ -2+i & 2i\end{vmatrix}=-1+9i,\ A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2-i & 3i\\ 2i & 2\end{vmatrix}=-2+2i$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1-i & 3i\\ -2+i & 2\end{vmatrix}=5+4i,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1-i & -2-i\\ -2+i & 2i\end{vmatrix}=3-2i$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2-i & 3i\\ -1+i & 5+2i\end{vmatrix}=-5-6i,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1-i & 3i\\ 3 & 5+2i\end{vmatrix}=-7+12i$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1-i & -2-i\\ 3 & -1+i\end{vmatrix}=6+5i;\ \text{Демек}\ A^{-1}=\frac{1}{4+3i}\begin{pmatrix}2-8i & -2+2i & -5-6i\\ -18+i & 5+4i & -7+12i\\ -1+9i & 3-2i & 6+5i\end{pmatrix}$$

Енді $AZ=B$ теңдеулер жүйесін шешу үшін матрицалық әдісті қолданайық, себебі бізде кері матрица табылған. Оқырман бұл жүйені Крамер әдісімен шешіп көруіне болады. Матрицалық әдіс бойынша $AZ=B$ теңдеулер жүйесінің шешімі келесі формуламен беріледі: $Z=A^{-1}B$

Онда

$$Z=\frac{1}{4+3i}\begin{pmatrix}2-8i & -2+2i & -5-6i\\ -18+i & 5+4i & -7+12i\\ -1+9i & 3-2i & 6+5i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=\frac{1}{4+3i}\begin{pmatrix}-i(2-8i)+5+6i\\ -i(-18+i)+7-12i\\ -i(-1+9i)-6-5i\end{pmatrix}=\frac{1}{4+3i}\begin{pmatrix}-3+4i\\ 8+6i\\ 3-4i\end{pmatrix}$$

$$z_1=\frac{-3+4i}{4+3i}=\frac{(-3+4i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=\frac{-12+16i+9i+12}{25}=i;\ z_2=\frac{8+6i}{4+3i}=2,$$

Сонымен $z_3=\dfrac{3-4i}{4+3i}=\dfrac{(3-4i)(4-3i)}{25}=\dfrac{12-16i-9i-12}{25}=-i$

.

Жауабы: $Z=\begin{pmatrix}i\\ 2\\ -i\end{pmatrix}$

Пайдаланылған әдебиеттер:

1. Төлегенова М. Б., Қойлышев У.Қ. Комплекс айнымалы функциялар теориясы және Амалдық есептеу. Оқу құралы. Қазақ ун-ті, 2021. Қазақша, орысша, ағылшынша.
2. Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1991 (предыдущие издания 1965, 1967).
3. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть 1. М.: Наука, 1985. (Предыдущие издания: 1968, 1976).
4. Сборник задач по теории аналитических функций. Под ред. М.А. Евграфова. Изд. 2-е доп. М.: Наука,1972.
5. Кангужин Б.Е. Теория функций комплексного переменного. Алматы. Қазақ университеті, 2007.